

Άσκηση 1

Απαλοιφή Gauss - Βήμα 2:

Διαιρούμε τη γραμμή 2 με -4.8 και την πολλαπλασιάζουμε με -16.8, δηλαδή την πολλαπλασιάζουμε με το $(-16.8 / -4.8) = 3.5$ οπότε μετασχηματίζεται ως εξής:

$$([0 \quad -4.8 \quad -1.56] [-96.208]) \times 3.5 = [0 \quad -16.8 \quad -5.46] [-336.728]$$

και την αφαιρούμε από τη γραμμή 3 για να πάρουμε:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Πίσω Αντικατάσταση - Βήμα 3:

$$\begin{aligned} 25a_1 + 5a_2 + a_3 &= 106.8 \\ a_1 &= \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25} \\ a_1 &= \frac{106.8 - 5 \times 19.6905 - 1.08571}{25} \\ a_1 &= 0.290472 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Έστω ότι ο πίνακας A έχει διαστάσεις $n \times n$. Το κόστος τόσο της παραγοντοποίησης LU όσο και της απαλοιφής Gauss είναι $O(n^3)$ πράξεις. Επίσης το κόστος επίλυσης ενός τριγωνικού συστήματος είναι $O(n^2)$ πράξεις.

(Α) Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$ και οι δύο μέθοδοι κοστίζουν χρόνο $O(n^3) + O(n^2) = O(n^3)$ καθώς εκτελούν πρώτα ελαχιστοποίηση του A σε U και μετά (το μόνο επιπλέον που γίνεται στην παραγοντοποίηση LU είναι η αποθήκευση των παραγόμενων πολλαπλασιαστών για το σχηματισμό του L) επιλύουν το τριγωνικό πλέον σύστημα $Ux = c$ με πίσω αντικατάσταση.

(Β) Για την επίλυση πολλών συστημάτων $Ax = b$ με ίδιο πίνακα συντελεστών και διαφορετικά δεξιά μέρη b , οι δύο μέθοδοι κοστίζουν τον ίδιο χρόνο για την επίλυση του πρώτου από αυτά, δηλαδή $O(n^3)$. Έπειτα, η παραγοντοποίηση LU , έχοντας υπολογίσει τον L και τον U για τους οποίους ισχύει ότι $LU = A$,

μπορεί να υπολογίσει τα υπόλοιπα συστήματα με χαμηλότερο κόστος από αυτό της απαλοιφής Gauss. Αυτό συμβαίνει διότι ισχύουν οι σχέσεις $Ax = b$, $Ux = c$, $A = LU$. Από αυτές εξάγεται ότι:

$$Ux = c \Leftrightarrow LUx = Lc \Leftrightarrow Ax = Lc \Leftrightarrow Lc = b$$

οπότε λύνουμε το τριγωνικό $Lc = b$ με πράξεις κόστους $O(n^2)$ για να βρούμε το c και μετά, πάλι με κόστος $O(n^2)$ λύνουμε το $Ux = c$ για το ζητούμενο x . Το συνολικό κόστος είναι $O(n^2) + O(n^2) = O(n^2)$. Η απαλοιφή Gauss θα έχει κόστος $O(n^3)$ για κάθε ένα από τα συστήματα. Άρα η παραγοντοποίηση LU είναι ταχύτερη υπολογιστικά στη συγκεκριμένη περίπτωση.

(C) Για την εύρεση του A^{-1} με απαλοιφή Gauss αρκεί να λυθεί το $AA^{-1} = I$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να γίνουν n απαλοιφές με το κόστος καθεμίας να είναι $O(n^3)$ και άρα ολικό κόστος $n \times O(n^3) = O(n^4)$. Με LU παραγοντοποίηση το κόστος είναι $O(n^3)$ για την εύρεση των L και U , $O(n^3)$ για την εύρεση του L^{-1} (η λύση του $LL^{-1} = I$ απαιτεί τη λύση n τριγωνικών συστημάτων κόστους $O(n^2)$ το καθένα και άρα συνολικό κόστος $n \times O(n^2) = O(n^3)$), $O(n^3)$ για την εύρεση του U^{-1} και $O(n^3)$ για τον πολλαπλασιασμό $U^{-1} \times L^{-1} = A^{-1}$. Συνολικά το κόστος υπολογισμού του αντιστρόφου από την παραγοντοποίηση LU είναι $4 \times O(n^3) = O(n^3)$. Άρα και εδώ η LU είναι ταχύτερη.

Άσκηση 3

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 10 & 8 & 16 \\ 8 & 12 & 22 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} m_{2,1} = \frac{2}{5} \\ \Longleftrightarrow \end{array} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 72/5 \\ 8 & 12 & 22 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} m_{3,1} = \frac{8}{25} \\ \Longleftrightarrow \end{array} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 8/25 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 72/5 \\ 0 & 52/5 & 518/25 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} m_{3,2} = \frac{26}{15} \\ \Longleftrightarrow \end{array} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 8/25 & 26/15 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 72/5 \\ 0 & 0 & -106/25 \end{bmatrix} & \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.32 & 1.733 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 14.4 \\ 0 & 0 & -4.24 \end{bmatrix} &
 \end{array}$$

Άρα,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.32 & 1.733 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 12 & 22 \end{bmatrix} \xLeftrightarrow[m_{3,2}=\frac{3}{2}]{m_{2,1}=m_{3,1}=0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$U = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5

Το κόστος σε πράξεις της απαλοιφής Gauss για την εύρεση του αντιστρόφου είναι ανάλογο του n^4 ενώ το αντίστοιχο κόστος της παραγοντοποίησης LU ανάλογο του $4 \times n^3$ (η αιτιολόγηση είναι στην απάντηση της άσκησης 2 για το (C)). Αν t είναι ο χρόνος που απαιτεί η τέλεση μίας πράξης, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{pmatrix} 4 \times n^3 t = 15 \text{ sec} \\ n^4 t = x \text{ sec} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{n} = \frac{15}{x} \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{15}{4} n \right)$$

Για $n = 2000$ ισχύει ότι ο χρόνος που χρειάζεται η απαλοιφή για την εύρεση του αντιστρόφου, είναι $x = 7500 \text{ sec}$.

Άσκηση 6

Ισχύουν οι ισχυρισμοί (2) (3) (4) (5) ενώ δεν ισχύει ο (1).

Άσκηση 7

Ο σωστός αλγόριθμος που δίνει τη λύση για το κάτω τριγωνικό σύστημα $[L][Z] = [C]$ είναι ο (B).

Ο (A) είναι λάθος γιατί στη γραμμή 4 αυξάνει το j μία φορά περισσότερο από όσο θα έπρεπε, με αποτέλεσμα να προστίθεται στο sum και ο συντελεστής της διαγωνίου του L . Ο (Γ) είναι λάθος γιατί δεν υπάρχει μηδενισμός του sum μεταξύ των βημάτων της αντικατάστασης.

Τέλος, ο (Δ) είναι λάθος διότι παραλείπει το αρχικό βήμα της αντικατάστασης, δηλαδή την εύρεση του z_1 .

Άσκηση 8

Σκοπός της εμπρός απαλοιφής είναι η ελλάτωση του πίνακα συντελεστών A σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα U .

Άσκηση 9

Η διαίρεση με το μηδέν κατά τη διάρκεια της εμπρός αντικατάστασης στην απαλοιφή του Gauss στη λύση του συστήματος $[A][X] = [C]$ σημαίνει ότι ο πίνακας είτε είναι ιδιόμορφος, είτε ότι είναι μη ιδιόμορφος και υπάρχει μοναδική λύση (εφόσον ο A είναι τετραγωνικός) αρκεί να γίνει μία, ή περισσότερες εναλλαγές γραμμών ώστε να παρακαμφθεί το πρόβλημα διαίρεσης με το μηδέν. Άρα οι ιδιότητες του πίνακα δεν είναι δυνατόν να προσδιορισθούν με ακρίβεια.

Άσκηση 10

Απαλοιφή

$$\begin{bmatrix} 0.003 & 55.23 \\ 6.239 & -7.123 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.12 \\ 47.23 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{2,1}=2.079 \times 10^3} \begin{bmatrix} 0.003 & 55.23 \\ 0 & -1.148 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.12 \\ -1.207 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Πίσω Αντικατάσταση

Βήμα 1:

$$\begin{aligned}-1.148 \times 10^5 x_2 &= -1.207 \times 10^5 \Rightarrow \\ x_2 &= 1.051\end{aligned}$$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned}0.003x_1 + 55.23x_2 &= 58.12 \Rightarrow \\ 0.003x_1 + 55.23 \times 1.051 &= 58.12 \Rightarrow \\ 0.003x_1 + 58.04 &= 58.12 \Rightarrow \\ 0.003x_1 &= 0.008 \Rightarrow \\ x_1 &= 2.666\end{aligned}$$

Άρα η λύση είναι

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.66 \\ 1.051 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 11

Απαλοιφή

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0.003 & 55.23 \\ 6.239 & -7.123 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 58.12 \\ 47.23 \end{bmatrix} \xrightarrow{|6.239| > |0.003|} \\ \begin{bmatrix} 6.239 & -7.123 \\ 0.003 & 55.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 47.23 \\ 58.12 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{2,1} = 4.808 \times 10^{-4}} \\ \begin{bmatrix} 6.239 & -7.123 \\ 0 & 55.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 47.23 \\ 58.09 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Πίσω Αντικατάσταση

Βήμα 1:

$$\begin{aligned}55.23x_2 &= 58.09 \Rightarrow \\ x_2 &= 1.051\end{aligned}$$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned}6.239x_1 - 7.123x_2 &= 47.23 \Rightarrow \\6.239x_1 - 7.123 \times 1.051 &= 47.23 \Rightarrow \\6.239x_1 - 7.486 &= 47.23 \Rightarrow \\6.239x_1 &= 54.71 \Rightarrow \\x_1 &= 8.769\end{aligned}$$

Άρα η λύση είναι

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.769 \\ 1.051 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 12

Η ορίζουσα του άνω τριγωνικού πίνακα που προκύπτει από την απαλοιφή Gauss είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

$$\begin{aligned}\det(U) &= (4.2857 \times 10^7) \times (3.7688 \times 10^5) \times (-26.914) \times (5.625 \times 10^5) \\ \det(U) &= -2.4452633190951 \times 10^{20} \\ \det(U) &\approx -2.445 \times 10^{20}\end{aligned}$$

Αν δεν χρησιμοποιήθηκε μερική οδήγηση και επομένως δεν έγιναν εναλλαγές γραμμών, ισχύει ότι $\det(A) = \det(U) \approx -2.445 \times 10^{20}$. Αν έγιναν εναλλαγές γραμμών ενδέχεται $\det(A) = -\det(U)$, αλλά αφού δεν υπάρχει αντίστοιχη επιλογή στην άσκηση υποθέτω ότι δεν γίνονται εναλλαγές.

Άσκηση 13

Κλασσική Μέθοδος Gauss

Βήμα 1:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix} \xLeftrightarrow[m_{2,1}=\frac{64}{25}]{} \\
\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -24/5 & -39/25 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 106.8 \\ -12026/125 \\ 279.2 \end{bmatrix} \xLeftrightarrow[m_{3,1}=\frac{144}{25}]{} \\
\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -24/5 & -39/25 \\ 0 & -84/5 & -119/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 106.8 \\ -12026/125 \\ -41996/125 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -24/5 & -39/25 \\ 0 & -84/5 & -119/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 106.8 \\ -12026/125 \\ -41996/125 \end{bmatrix} \xLeftrightarrow[m_{3,2}=\frac{7}{2}]{} \\
\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -24/5 & -39/25 \\ 0 & 0 & 7/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 106.8 \\ -12026/125 \\ 19/25 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Πίσω Αντικατάσταση

Βήμα 1:

$$\begin{aligned}
7/10a_3 &= 19/25 \\
a_3 &= 38/35
\end{aligned}$$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned}
-\frac{24}{5}a_2 - \frac{39}{25}a_3 &= -12026/125 \\
a_2 &= 827/42
\end{aligned}$$

Βήμα 3:

$$\begin{aligned} 25a_1 + 5a_2 + a_3 &= 106.8 \\ a_1 &= 61/210 \end{aligned}$$

Άρα η λύση είναι $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61/210 \\ 827/42 \\ 38/35 \end{bmatrix}$

Άσκηση 14

Κλασσική Μέθοδος Gauss

Βήμα 1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ 9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 0 & -2.75 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ -2.25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 0 & -2.75 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ -2.25 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 0 & 0.001 & 8.5 \\ 0 & 0 & 23375.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 45 \\ 8.501 \\ 23375.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Πίσω Αντικατάσταση

Βήμα 1:

$$\begin{aligned} 23375.5x_3 &= 23375.5 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned} 0.001x_2 + 8.5x_3 &= 8.501 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Βήμα 3:

$$\begin{aligned} 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 &= 45 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Η λύση που βρέθηκε είναι η $[X] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Δεν έχουμε απώλεια ακρίβειας στο συγκεκριμένο παράδειγμα κλασσικής απαλοιφής αν οι υπολογισμοί γίνονται με ακρίβεια 6 σημαντικών ψηφίων.

Άσκηση 15

Η διαφορά της συγκεκριμένης μεθόδου σε σχέση με την κλασσική απαλοιφή είναι ότι εδώ εφαρμόζεται μερική οδήγηση. Έτσι βλέπουμε στο βήμα 3 της απαλοιφής ότι οι γραμμές 2 και 3 εναλλάσσονται ώστε στη θέση του δεύτερου οδηγού να έρθει ο μεγαλύτερος κατά απόλυτη τιμή αριθμός της δεύτερης στήλης.

Άσκηση 16

Εφόσον θέλω να υπολογίσω τη συνάρτηση στο $t = 21$ με πολυώνυμο βαθμού 2 θα χρησιμοποιήσω από το σύνολο των δεδομένων τις τρεις τιμές που βρίσκονται πλησιέστερα στο ζητούμενο. Δηλαδή τις τιμές της $v(t)$ για $t = 14, 15, 20$.

Το σύστημα που προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{aligned} 196a + 14b + c &= 227.04 = v(14) \\ 225a + 15b + c &= 362.78 = v(15) \\ 400a + 20b + c &= 517.35 = v(20) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 196 & 14 & 1 \\ 225 & 15 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227.04 \\ 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 17

Το σύστημα είναι λυμένο με μερική οδήγηση στην ίδια την άσκηση 15 αν δεν κάνω λάθος. Οπότε δεν θα το αντιγράψω εδώ.

Άσκηση 18

Κατά τη διάρκεια της απαλοιφής με μερική οδήγηση πρέπει να χρησιμοποιηθεί επιπλέον μία αθέρα μεταβλητή-μετρητής c η οποία αρχικοποιείται στο μηδέν πριν την έναρξη της απαλοιφής και κατά τη διάρκειά της αυξάνει κατά 1 όταν συμβαίνει εναλλαγή γραμμών. Όταν η απαλοιφή ολοκληρωθεί, η ορίζουσα του αρχικού πίνακα είναι:

$$\det(A) = (-1)^c \times \prod_{i=1}^n [u_{i,i}]$$

Απαλοιφή με μερική οδήγηση

$$c = 0$$

Βήμα 1:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -1/1000 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -1/1000 & 6 \\ 0 & 5/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -1/1000 & 6 \\ 0 & 5/2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{c++} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & -1/1000 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 3001/500 \end{bmatrix} = U$$

Τελικά $c = 1$, άρα:

$$\det(A) = (-1)^1 \times [10 \times \frac{5}{2} \times \frac{3001}{500}] = -\frac{3001}{500} = -150.05$$